Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Jonas Metzinger
Lars Lauer

Repetitorium Lineare Algebra 1 (WS 2023/24)
Blatt 1

Aufgabe 1 (Relationen):

(i) Sei $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und definiere eine Relation $\mathfrak{R}$ durch

$$(n_1, n_2)\mathfrak{R}(m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{R}$ eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die Äquivalenzklasse von $[(3,5)]_{\mathfrak{R}} \in \mathfrak{P}(A)$ von $(3,5) \in A$ an und finden Sie eine bijektive *wohldefinierte* Abbildung $\varphi\colon A/\mathfrak{R} \to \mathbb{Z}$ an. Hierbei bezeichne $A/\mathfrak{R}$ die Menge aller Äquivalenzklassen.

(ii) Definiere eine Relation $|$ auf $\mathbb{N}$ durch

$$n \mid m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = kn.$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine partielle Ordnungsrelation (d. h. reflexiv, antisymmetrisch und transitiv) handelt. Warum funktioniert dies **nicht** auf $\mathbb{Z}$, d. h. warum ist es dort keine Ordnungsrelation mehr?

(iii) Zeigen Sie, dass die folgendermaßen definierte Relation eine Äquivalenzrelation ist.

$$\mathfrak{R} := \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \text{ ist durch } n \text{ teilbar}\}$$

(iv) Sei A eine nicht leere beliebige Menge, und $\mathfrak{R} \subset A \times A$ eine reflexive Relation. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{R}$ genau dann eine Äquivalenzrelation ist, wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt

$$x\mathfrak{R}z \wedge y\mathfrak{R}z \Rightarrow x\mathfrak{R}y$$

Aufgabe 2 (Wohldefiniertheit):

(i) Zeigen oder widerlegen Sie: $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, \frac{p}{q} \mapsto p + q$ ist wohldefiniert.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ sodass $m|n$, dann ist $\phi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, [a]_n \mapsto [a]_m$ wohldefiniert. Was ist wenn m nicht n teilt?

(iii) Sei V ein Vektorraum und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass die Addition und Multiplikation auf V/U wohldefiniert sind.

Aufgabe 3 (Gruppen): Sei G eine Gruppe.

(i) Zeigen Sie, dass die Gruppe der Kongruenzklassen wirklich eine Gruppe ist. Zeigen Sie insbesondere die Wohldefiniertheit der Addition.

(ii) Sei H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass

$$C_G(H) = \{g \in G : gh = hg \text{ für alle } h \in H\}$$

eine Untergruppe von G ist. (Man nennt diese Untergruppe auch den Zentralisator)

(iii) Zeigen Sie, dass G genau dann abelsch ist, wenn die Inversenabbildung $g \mapsto g^{-1}$ ein Gruppenhomorphismus ist.

(iv) Sei G eine Gruppe mit der Eigenschaft $(gh)^2 = g^2h^2$ für alle $g, h \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 4 (Symmetrische Gruppe, Zykel, Satz von Lagrange):

(i) Seien folgende Elemente der Symmetrischen Gruppe S_7 gegeben

$$\alpha = (1\,3\,5\,7)(2\,4), \beta = (2\,3\,1\,4), \gamma = (2\,3)$$

Bestimmen Sie α^3, $\alpha^2\beta$, α^{-1} und $\gamma\alpha\beta$ und jeweils das Signum der Permutationen.

(ii) Gibt es eine Untergruppe von S_3 der Ordnung 4 und gibt es eine Untergruppe der Ordnung 3? Sollte es eine geben, geben Sie die Erzeuger an.

(iii) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G mit Ordnung p, wobei p prim ist, zyklisch ist.

Aufgabe 5 (Ringe und Körper):

(i) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Was ist das multiplikative Inverse von $a + b\sqrt{2}$?

(ii) Zeigen Sie, dass jeder Körperhomomorphismus ungleich der Nullabbildung injektiv ist.

(iii) Sei K ein Körper mit Charakteristik $p \neq 0$. Zeigen Sie, dass p prim ist.