Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Jonas Metzinger
Lars Lauer

Repetitorium Lineare Algebra 1 (WS 2023/24)
Blatt 2

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus):

(i) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccl} 6x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & =5 \\ 4x_1 & +2x_2 & +1x_3 & +2x_4 & +3x_5 & =4 \\ 4x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +1x_5 & =0 \\ 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & +3x_4 & +2x_5 & =1 \end{array}$$

Bestimmen sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$.

(ii) Gegeben sei in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccl} 1x_1 & -3x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +2x_5 & =1 \\ 0x_1 & +0x_2 & 1x_3 & +0x_4 & -1x_5 & =1 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & 1x_4 & +1x_5 & =0 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & =\alpha \end{array}$$

Bestimmen sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit ganzzahligen Einträgen. Zeigen Sie: Ist $Ax = \underline{0}$ für ein $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{\underline{0}\}$ lösbar, so existiert auch eine Lösung $x_0 \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\underline{0}\}$ mit $Ax_0 = \underline{0}$.

Aufgabe 2 (Inverse Matrix):

(i) Sind folgende Matrizen invertierbar? Geben Sie, wenn ja, deren Inverse an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2\times 2}$$

(ii) Sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix sodass es $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^k = 0$. Zeigen sie dass dann A nicht invertierbar ist.

Aufgabe 3 (Untervektorräume):

(i) Sei $V := \mathrm{Abb}([0,1], \mathbb{R})$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind Untervektorräume?

$$\begin{aligned} U_1 &= \{f \in V \ : \ f(0) = 0\}, \\ U_2 &= \{f \in V \ : \ f(0) > 0\}, \\ U_3 &= \{f \in V \ : \ f(0) = f(1)\}. \end{aligned}$$

(ii) Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen oder widerlegen sie folgende Aussagen:

(1) Sind $U, W \subseteq V$ Untervektorräume, so ist auch $U \cup W$ ein Untervektorraum.

(2) Sind $U, W \subseteq V$ Untervektorräume, so ist auch $U \cap W$ ein Untervektorraum.

Aufgabe 4 (Lineare Abbildungen):

(i) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen sie gegebenenfalls ihr Bild und ihren Kern:

(1) $\phi : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ ,\ f \mapsto (x \mapsto f(x) + f(-x))$

(2) $\psi : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ ,\ f \mapsto f^2 = f \circ f$

(ii) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen sie gegebenenfalls ihr Bild und ihren Kern:

(1) $\phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ ,\ (x_1, x_2, x_3)^t \mapsto (x_1 - x_3, 0, x_3 - x_1)^t$

(2) $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ ,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2)^t$

Aufgabe 5 (Lineare Unabhängigkeit):

(i) Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume, $\phi : V \to W$ linear und $v_1, ..., v_k \in V$. Zeigen oder widerlegen sie folgende Aussagen:

(1) Sind $v_1, ..., v_k \in V$ linear unabhängig, so sind $\phi(v_1), ..., \phi(v_k) \in W$ linear unabhängig.

(2) Sind $\phi(v_1), ..., \phi(v_k) \in W$ linear unabhängig, so sind $v_1, ..., v_k \in V$ linear unabhängig.

(ii) Sei V ein K-Vektorraum. Weiterhin seien $v_1, \ldots, v_n \in V$, und man definiere $w_i := v_i + v_{i+1}$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dann ist $v_1, \ldots, v_n$ genau dann linear unabängig, wenn $v_n, w_1, \ldots, w_{n-1}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 6 (Basis): Seien V, W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) φ ist genau dann injektiv, wenn für jede Basis B von V das Bild $\varphi(B)$ nicht den Nullvektor enthält.

(ii) Sei B eine Basis von V. Dann ist φ genau dann surjektiv, wenn $\varphi(B)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(iii) φ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Basis B von V bijektiv auf eine Basis $\varphi(B)$ von W abbildet.

Aufgabe 7 (Darstellungsmatrix): Sei $P_2 := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 2\}$ mit Basis $B = (1, X, X^2)$.

(i) Zeigen sie dass $B' = (2X^2 - X - 1, 2X - 3, -X^2 + X)$ eine Basis von P_2 ist.

(ii) Bestimmen sie die Basiswechelmatrix $D_{BB'} = D_{BB'}(\mathrm{id})$.

(iii) Zeigen sie dass die Abbildung $\phi\colon P_2 \to P_2, f \mapsto f - f'$ eine lineare Abbildung ist. Bestimmen sie die Darstellungsmatrizen $D_{BB}(\phi)$ und $D_{BB'}(\phi)$.