Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Jonas Metzinger
Lars Lauer

Repetitorium Lineare Algebra 1 (WS 2023/24)
Blatt 3

Die ersten drei Aufgaben dieses Blattes sind thematisch noch dem letzten Tag zuzuordnen.

Aufgabe 1 (Fortsetzungssatz und Basisergänzungssatz): Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume.

(i) Seien $V_1, V_2 \subseteq V$ zwei sich trivial schneidene Untervektorräume, d. h. $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Weiterhin existiere für $i = 1, 2$ jeweils eine lineare Abbildung

$$\varphi_i \colon V_i \to W.$$

Zeigen Sie, dass dann eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to W$ existiert mit $\varphi_i = \varphi|_{V_i}$.

Aufgabe 2: Seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V.

(i) Zeigen Sie, dass U und W genau dann isomorph sind, wenn V/U und V/W isomorph sind.

(ii) Sei $\psi \colon U \to W$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass ψ sich zu einem Isomorphismus $\Psi \colon V \to V$ fortsetzen lässt, sodass $\Psi(u) = \psi(u)$ für alle $u \in U$.

Aufgabe 3: Sei $V = \mathbb{R}[X]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome. Definiere für $a, b \in \mathbb{R}$ die Menge

$$W_{a,b} := \{f \in V \mid f(0) = a,\ f(1) = b\} \subseteq V.$$

(i) Zeigen Sie, dass $W_{a,b}$ genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn $a = b = 0$.

(ii) Seien nun $a = b = 0$. Zeigen Sie folgende Isomorphie

$$V/W_{0,0} \cong \mathbb{R}^2.$$

Betrachte den Einsetzungshomomorphismus $\phi_\lambda \colon V \to \mathbb{R}, f(X) \mapsto f(\lambda)$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi \colon V \to W_{0,0},\ f(X) \mapsto X \cdot (X-1) \cdot f(X)$$

ein Vektorraumisomorphismus ist.

Aufgabe 4 (Determinante):

(i) Seien folgende Matrizen über $\mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie deren Determinante in $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Über welchen endlichen Körpern $\mathbb{F}_p$ sind diese invertierbar?

(ii) Sei $n = 7$ und $\sigma = (1\,7\,3\,5)(2\,6\,4) \in S_n$. Definiere auf der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^7$ folgende Abbildung

$$\varphi_\sigma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Endomorphismus ist und bestimmen Sie deren Determinante, $\operatorname{sgn}(\sigma)$ und vergleichen Sie deren Werte.

(iii) Verallgemeinern Sie (ii) für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie Ihre Vermutung unter Verwendung der Leibniz Formel.

Folgern Sie insbesondere für $A \in K^{n \times n}$ die Beziehung $\det(V_\sigma A) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A)$. Hierbei bezeichne $V_\sigma \in K^{n\times n}$ eine Vertauschungsmatrix.

Aufgabe 5 (Eigenwerte und Eigenvektoren):

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -12 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$. Zeigen Sie

(1) A ist genau dann invertierbar, wenn das Produkt der Eigenwerte ungleich 0 ist.

(2) Ist A invertierbar, dann sind die Eigenwerte von A^{-1} gegeben durch $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots \lambda_k^{-1} \in K$.

(3) Es existiere nun ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = I_n$. Zeige, dass alle Eigenwerte k-te Einheitswurzeln sind, d. h. dass $\lambda^k = 1$.

Aufgabe 6 (Diagonalisierbarkeit die Zweite): Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Determinante und die Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 2)$ zum Eigenwert 2.

(iii) Bestimmen Sie den Rang über den Körpern $\mathbb{R}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$.

(iv) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\phi^2 = \phi$. Zeigen Sie, dass ϕ dann höchstens zwei verschiedene Eigenwerte haben kann. Welche sind diese?

Aufgabe 7 (Diagonalisierbarkeit die Dritte): Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\varphi^2 = 4\,\mathrm{id}$.

(i) Zeigen Sie, dass φ bijektiv ist.

(ii) Zeigen Sie, dass alle Vektoren $v \in \mathrm{Bild}(\varphi + 2\,\mathrm{id})$ Eigenvektoren von φ zum Eigenwert 2 sind.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Bild}(\varphi + 2\,\mathrm{id}) \cap \ker(\varphi + 2\,\mathrm{id}) = \{0\}$.

(iv) Folgern Sie daraus, dass φ diagonalisierbar ist. Was sind die Eigenwerte von φ?