Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Antonio Ferrigno
Raphael Ihme

Repetitorium Analysis 1 (WS 2024/25)
Blatt 2
Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen, komplexe Zahlen

---

Aufgabe 1 (Quiz): Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel. Seien stets $D \subseteq \mathbb{R}$, sodass D nicht nur einen Punkt enthält und $f, g : D \to \mathbb{R}$

(i) Es gibt keine Ordnung auf $\mathbb{C}$, so das die Anordnungsaxiome erfüllt sind.

(ii) f ist stetig in $x \in D$, wenn es eine Folge (x_n) in D gibt, die gegen x konvergiert, sodass $(f(x_n))$ gegen $f(x)$ konvergiert.

(iii) Ist f gleichmäßig stetig, dann ist f stetig.

(iv) f ist nicht stetig in $x \in D$, wenn es eine Folge (x_n) in D gibt, die gegen x konvergiert, sodass $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert.

(v) Ist f stetig in $x \in D$, dann ist f in x differenzierbar.

(vi) Ist f stetig und D beschränkt, dann ist f beschränkt.

(vii) Sind f und g nicht differenzierbar in $x \in D$ dann ist $f + g$ nicht differenzierbar in x.

(viii) Ist f differenzierbar und $x_0 \in D$ ein innerer Punkt von D und eine Extremstelle von f dann ist $f'(x_0) = 0$.

(ix) Ist f 2-mal differenzierbar und $x_0 \in D$ sodass $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, dann hat f in x_0 kein lokales Extremum.

(x) Ist f differenzierbar und $f' > 0$ auf D dann ist f streng monoton wachsend.

(xi) Wenn ich in der Klausur eine Funktion ableite, dann gehe ich sicher dass die Funktion differenzierbar ist und schreibe es auch hin. Ich achte bei Anwendung von Sätzen aus der Vorlesung darauf, dass alle Vorraussetzungen erfüllt sind und schreibe das auch hin.

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen): (i) Geben Sie für folgende komplexe Zahlen z jeweils Real-, Imaginärteil und den Betrag an und bringen Sie z auf die Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bzw. $z = r \cdot e^{i\varphi}$ mir $r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$.

(a) $z = 3 + 4i$.

(b) $z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(c) $z = \frac{12}{5} + \frac{9}{5}i$.

(d) $z = e^{-i\pi}$.

(ii) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$.
Hinweis für (c): Eine Lösung der Gleichung ist reell.

(a) $z^2 + 2z - 2i + 1 = 0$.

(b) $z^4 = 1$.

(c) $z^3 - iz^2 - 2z^2 + 7z + 4iz - 6 - 3i = 0$.

Hinweis: die komplexen Zahlen sind algebraisch abgeschlossen, das bedeutet dass ein Polynom n-ten Grades über den komplexen Zahlen genau n Nullstellen hat (mit Vielfachheit gezählt, $n \geq 1$).

Aufgabe 3 (Stetigkeit): Untersuchen Sie folgende Funktionen f auf Stetigkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs.

(i) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & , x \in (0, 1] \\ 1 & , x = 0 \end{cases} .$$

(ii) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) - 1 & , x \in [0, 1] \\ 0 & , x \in [-1, 0) \end{cases} .$$

(iii) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \in (0, 1) \\ -\sqrt{x - 1} + 1 & , x \in [1, \infty) \end{cases} .$$

(iv) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Aufgabe 4 (Sätze über stetige Funktionen): Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) Jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sodass $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist. Finden Sie alle Funktionen f mit diesen Eigenschaften und zeigen Sie, dass Ihre Liste vollständig ist.

(iii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{N}$. Dann ist f konstant.

(iv) Die Gleichung $\exp(x) + x = x^2$ besitzt mindestens eine Lösung in dem Intervall $[-1, 1]$.

(v) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion, die jeden Wert $c \in [f(a), f(b)]$ annimmt. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Aufgabe 5 (Differenzierbarkeit): Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs.

(i) Sei $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Ist f differenzierbar, so bestimme man f' und prüfe die Ableitung auf Stetigkeit.

(ii) Sei $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

(iii) Wieso ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{|x|}$$

nicht differenzierbar in $x = 0$?

Aufgabe 6 (Extremstellen): (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Man beweise, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^n e^{-n}$ an genau einer Stelle, nämlich $x = n$ ihr einziges (absolutes, als auch relatives) Maximum annimmt.

(ii) Sei folgende Funktion gegeben

$$f\colon \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\log(x)}{x}.$$

Bestimmen Sie alle lokalen als auch globalen Extrema.

Aufgabe 7 (Mittelwertsatz, Sätze über differenzierbare Funktionen): Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben mit $f'(a) < y_0 < f'(b)$. Zeigen Sie, dass es $x_0 \in [a,b]$ gibt mit $f'(x_0) = y_0$

(ii) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes für $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, dass

$$\exp\left(x^2\right) \leq \frac{1}{1-2x^2}$$

gilt.

(iii) Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem offenen Intervall I und differenzierbar in $I \backslash \{a\}$ mit $a \in I$. Weiterhin existiere $c := \lim_{x \to a} f'(x)$. Zeigen Sie, dass f in a differenzierbar ist und es gilt $c = f'(a)$.

Hinweis: Betrachten Sie Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergieren und nutzen Sie den Mittelwertsatz.

(iv) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion mit $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass f streng monoton fallend ist.

(v) Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in V$ mit $f'(x) > 0$. Zeigen Sie, dass ein offenes Intervall $U \subseteq V$ mit $x \in U$ existiert, sodass die Einschränkung

$$f\mid_U\colon U \to \mathbb{R}$$

injektiv ist.

(vi) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit der Eigenschaft, dass

$$|f(x) - f(y) \leq |x-y|^2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 8 (Grenzwerte): Entscheiden und zeigen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Sei $a > 0$.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\exp(\cos(x)) - 1}{x - \pi/2}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x \cos(x)}{x + 2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (\sinh(x) + 1)^{1/x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sinh(x) + x}{\log(1 + x)}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{7}}$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{a^{\log(x)} - x}{\log(x)}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x^3}$ h) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x + 4} - \sqrt{x + 2})$