Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Antonio Ferrigno
Raphael Ihme

Repetitorium Analysis 1 (WS 2024/25)
Blatt 3
Integration

Aufgabe 1 (Quiz): Welche der folgenden Aussagen sind Wahr? Begründen Sie ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegegenbeispiel. Seien $a < b$ und $f_n, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(i) Jede 2-mal differenzierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

(ii) Wenn f stetig ist dann ist $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ stetig und differenzierbar.

(iii) Für jede integrierbare Funktion existiert eine analytisch geschlossene Formel für die Stammfunktion, d. h. wir können eine Stammfunktion konkret angeben.

(iv) Es gilt $\int e^{-x^2} dx = \frac{1}{-x^2} e^{-x^2}$.

(v) Jede auf einem beschränkten Intervall definierte stetige Funktion hat ein endliches Integral auf diesem Intervall.

Aufgabe 2 (Integrale ausrechnen): Bestimmen Sie folgende Integrale

(i)
$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$$

(ii)
$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$$

(iii)
$$\int_0^{4\pi} x \sin(x) \cos(x) dx$$

(iv)
$$\int_0^1 \frac{x^2+4}{x^2+1} dx$$

(v)

$$\int_0^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$$

(vi)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(2x)dx$$

(vii)

$$\int_e^{e^e} \frac{\log(\log(x))}{x}dx$$

(viii)

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$$

(ix)

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$$

(x) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für welche das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(\log(x))^\alpha}dx$$

existiert. Bestimmen Sie den Wert, falls das uneigentliche Integral existiert.

Aufgabe 3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Seien $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $\varphi\colon [c,d] \to I$ stetig differenzierbar mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

(ii) Seien $\alpha, \beta\colon [a,b] \to [a,b]$ differenzierbar und sei f eine auf $[a,b]$ stetige Funktion. Bestimme die Ableitung

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt.$$

Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $H(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ mit $x_0 \in [a,b]$.

Aufgabe 4 (*Knobelaufgabe I*): Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_{-2}^2 \left(x^3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$$

Aufgabe 5 (*Knobelaufgabe II*): Bestimmen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k x^{2k} k + (-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}}{\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{i} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}} \mathrm{d}x$$