Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Antonio Ferrigno
Raphael Ihme

Repetitorium Analysis 1 (WS 2024/25)
Blatt 1
Induktion, Abzählbarkeit, Konvergenz von Folgen und Reihen

Aufgabe 1 (Quiz): Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(i) Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

(ii) Die Menge $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

(iii) Ist $I \neq \emptyset$ eine Menge und A_i abzählbar für alle $i \in I$, ist $\bigcup_{i\in I} A_i$ abzählbar.

(iv) Ist $I \neq \emptyset$ eine Menge und A_i abzählbar für alle $i \in I$, ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ abzählbar.

(v) Ist $I \neq \emptyset$ abzählbar und A_i abzählbar für alle $i \in I$, ist $\Pi_{i\in I} A_i$ abzählbar.

(vi) (a_n) ist eine konvergente Folge reeller Zahlen genau dann, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

(vii) Für jede Folge (a_n) reeller Zahlen gilt: (a_n) ist genau dann konvergent, wenn (a_n) beschränkt ist.

(viii) Seien (a_n) und (b_n) Folgen positiver Zahlen, sodass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann konvergiert die Quotienten-Folge (a_n/b_n) gegen 0.

(ix) Eine Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt sodass $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

(x) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

(xi) Jede konvergente Reihe ist absolut konvergent.

(xii) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und (b_n) eine Folge nichtnegativer Zahlen sodass $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Aufgabe 2 (Induktion): Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion.

(i) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $\Pi_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(v) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

Aufgabe 3 (Abzählbarkeit): Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $M_1, \ldots, M_n$ nichtleere, abzählbare Mengen. Dann ist $M_1 \times \ldots \times M_n$ abzählbar.

(ii) Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \colon f \text{ Abbildung}\}$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$. Dann ist $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ überabzählbar.

(iii) Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, falls es ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X] \backslash \{0\}$ gibt mit $f(\alpha) = 0$. Ist $\mathbb{A} := \{\alpha \colon \alpha \text{ algebraisch}\}$ abzählbar oder überabzählbar? Beweisen Sie ihre Vermutung.

Aufgabe 4 (Suprema und Infima): Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und A sei nach oben beschränkt. Weiterhin gebe es für jedes $x \in B$ ein $y \in A$ mit $x < y$. Zeigen Sie, dass dann ebenfalls B nach oben beschränkt ist mit $\sup B \leq \sup A$. Gilt auch $\sup B < \sup A$?

Aufgabe 5 (Grenzwerte von Folgen): Untersuchen Sie die Folgen (a_n) auf eigentliche oder uneigentliche Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n \geq 1$.

(ii) $a_n = n \sin(\frac{1}{n})$.

(iii) $a_n = \frac{2n^3 - 4n^2 + n + 1}{n^2 + n + 1}$.

(iv) $a_n = (-1)^n \frac{n^2 - 2n}{n^3 + 4n + 1}$.

(v) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ mit $0 < a \leq b$.

Aufgabe 6 (Mehr zu Folgen): Sei (a_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Folge (b_n) durch

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dass (b_n) ebenfalls gegen a konvergiert.

Aufgabe 7 (Und noch mehr zu Folgen):

(i) Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Sei (a_n) eine Folge, sodass es $C \in [0,1)$ gibt, sodass $|a_{n+1}| \leq C|a_n|$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (a_n) gegen 0 konvergiert.

(iii) Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie dass (a_n) genau dann konvergiert, wenn $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ ist und, dass dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(iv) Seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Folgen mit $0 < b_n < 1$ sowie $a_n = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie (a_n) auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

(v) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Beweisen Sie, dass (a_n) genau dann konvergiert, wenn die Teilfolgen (a_{2n}), (a_{2n+1}) und (a_{3n}) konvergieren.

Aufgabe 8 (Konvergenz von Reihen):

(i) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+2n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{-n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n}}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

(ii) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren folgende Reihen?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Wert. *Hinweis: Partialbruchzerlegung.*

Aufgabe 9 (Mehr zu Reihen): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und (b_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent ist. Gilt dies auch wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur als konvergent vorrausgesetzt ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 10 (Challenge): Zeigen Sie dass es $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ gibt, sodass $\mathcal{F}$ überabzählbar ist und für alle $A, B \in \mathcal{F}$ mit $A \neq B$ gilt, dass $A \cap B$ endlich ist.

Hinweis: Diese Aufgabe ist nicht ganz einfach und sollte, wenn überhaupt, als letztes bearbeitet werden.

Aufgabe 11 (Etwas kniffliger): Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, wenn es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt sodass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$. Weiterhin nennen wir eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \backslash A$ offen ist. Zeigen Sie dass $A \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge ist genau dann, wenn für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $x = \lim_{n \to \infty} x_n \in A$ ist.

Hinweis: Diese Aufgabe ist warscheinlich nicht relevant für die Klausur, ihr werdet in Analysis 2 eine viel allgemeinere Version dieser Aussage sehen. Dennoch ist die Aufgabe mit Kenntnissen aus der Analysis 1 lösbar.