Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Sebastian Engelhardt
Jonas Metzinger

Repetitorium Lineare Algebra 1 (WS 2024/25)

Blatt 3: Determinante und Eigenwerttheorie

Aufgabe 1. *(Determinante)*

(i) Seien folgende Matrizen über $\mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie deren Determinanten in $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Über welchen endlichen Körpern $\mathbb{F}_p$ sind diese invertierbar?

(ii) Sei $n = 7$ und $\sigma = (1\,7\,3\,5)(2\,6\,4) \in S_n$. Definiere auf der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^7$ folgende Abbildung

$$\varphi_\sigma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; \varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Endomorphismus ist und bestimmen Sie deren Determinante, $\operatorname{sgn}(\sigma)$ und vergleichen Sie deren Werte.

Aufgabe 2. *(Eigenwerte und Eigenvektoren)*

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -12 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$. Zeigen Sie

(1) A ist genau dann invertierbar, wenn das Produkt der Eigenwerte ungleich 0 ist.

(2) Ist A invertierbar, dann sind die Eigenwerte von A^{-1} gegeben durch $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots \lambda_k^{-1} \in K$.

(3) Es existiere nun ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = I_n$. Zeige, dass alle Eigenwerte k-te Einheitswurzeln sind, d.h. dass $\lambda^k = 1$.

Aufgabe 3. *(Diagonalisierbarkeit)*
Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Determinante und die Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, 2)$ zum Eigenwert 2.

(iii) Bestimmen Sie den Rang über den Körpern $\mathbb{R}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$.

(iv) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\phi^2 = \phi$. Zeigen Sie, dass ϕ dann höchstens zwei verschiedene Eigenwerte haben kann. Welche sind diese?