Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Sebastian Engelhardt
Jonas Metzinger

Repetitorium Lineare Algebra 1 (WS 2024/25)

Blatt 2: Vektorraumtheorie

Aufgabe 1. *(Vektorräume)*

(i) Sei $V \coloneqq \text{Abb}([0,1],\mathbb{R})$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind Untervektorräume?

$$U_1 = \{f \in V \ : \ f(0) = 0\},$$
$$U_2 = \{f \in V \ : \ f(0) > 0\},$$
$$U_3 = \{f \in V \ : \ f(0) = f(1)\}.$$

(ii) Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen oder widerlegen sie folgende Aussagen:

(1) Sind $U, W \subseteq V$ Untervektorräume, so ist auch $U \cup W$ ein Untervektorraum.

(2) Sind $U, W \subseteq V$ Untervektorräume, so ist auch $U \cap W$ ein Untervektorraum.

Aufgabe 2. *(Lineare Abbildungen)*

(i) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen sie gegebenenfalls ihr Bild und ihren Kern:

(1) $\phi : \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ f \mapsto (x \mapsto f(x) + f(-x))$

(2) $\psi : \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ f \mapsto f^2 = f \circ f$

(ii) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Bestimmen sie gegebenenfalls ihr Bild und ihren Kern:

(1) $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ ,\ (x_1, x_2, x_3)^t \mapsto (x_1 - x_3, 0, x_3 - x_1)^t$

(2) $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ ,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2)^t$

Aufgabe 3. *(Lineare Unabhängigkeit)*

(i) Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume, $\phi : V \to W$ linear und $v_1, ..., v_k \in V$. Zeigen oder widerlegen sie folgende Aussagen:

(1) Sind $v_1, ..., v_k \in V$ linear unabhängig, so sind $\phi(v_1), ..., \phi(v_k) \in W$ linear unabhängig.

(2) Sind $\phi(v_1), ..., \phi(v_k) \in W$ linear unabhängig, so sind $v_1, ..., v_k \in V$ linear unabhängig.

(ii) Sei V ein K-Vektorraum. Weiterhin seien $v_1, \ldots, v_n \in V$, und man definiere $w_i := v_i + v_{i+1}$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dann ist $v_1, \ldots, v_n$ genau dann linear unabängig, wenn $v_n, w_1, \ldots, w_{n-1}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 4. *(Basis von Vektorräumen)*
Seien V, W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) φ ist genau dann injektiv, wenn für jede Basis B von V das Bild $\varphi(B)$ nicht den Nullvektor enthält.

(ii) Sei B eine Basis von V. Dann ist φ genau dann surjektiv, wenn $\varphi(B)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(iii) φ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Basis B von V bijektiv auf eine Basis $\varphi(B)$ von W abbildet.

Aufgabe 5. *(Darstellungsmatrix)*
Sei $P_2 := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 2\}$ mit Basis $B = (1, X, X^2)$.

(i) Zeigen Sie, dass $B' = (2X^2 - X - 1, 2X - 3, -X^2 + X)$ eine Basis von P_2 ist.

(ii) Bestimmen Sie die Basiswechelmatrix $D_{BB'} = D_{BB'}(\mathrm{id})$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi \colon P_2 \to P_2, f \mapsto f - f'$ eine lineare Abbildung ist. Bestimmen sie die Darstellungsmatrizen $D_{BB}(\phi)$ und $D_{BB'}(\phi)$.