Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Sebastian Engelhardt
Jonas Metzinger

Repetitorium Lineare Algebra 1 (WS 2024/25)

Blatt 1: Relationen, Strukturmathematik und Lineare Gleichungssysteme

---

Aufgabe 1. *(Relationen und Wohldefiniertheit)*

(i) Sei $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und definiere eine Relation $\mathfrak{R}$ durch

$$(n_1, n_2)\mathfrak{R}(m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{R}$ eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die Äquivalenzklasse $[(3,5)]_{\mathfrak{R}} \in \mathfrak{P}(A)$ von $(3,5) \in A$ an und finden Sie eine bijektive *wohldefinierte* Abbildung $\varphi\colon A/\mathfrak{R} \to \mathbb{Z}$. Hierbei bezeichne $A/\mathfrak{R}$ die Menge aller Äquivalenzklassen.

(ii) Definiere eine Relation $\mid$ auf $\mathbb{N}$ durch

$$n \mid m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = kn.$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine partielle Ordnungsrelation (d.h. reflexiv, antisymmetrisch und transitiv) handelt. Warum funktioniert dies **nicht** auf $\mathbb{Z}$, d.h. warum ist es dort keine Ordnungsrelation mehr?

(iii) Zeigen oder widerlegen Sie: $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, \frac{p}{q} \mapsto p + q$ ist wohldefiniert.

(iv) Zeigen oder widerlegen Sie: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ sodass $m|n$, dann ist $\phi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, [a]_n \mapsto [a]_m$ wohldefiniert. Was ist wenn m nicht n teilt?

Aufgabe 2. *(Gruppen)*

(i) Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass

$$C_G(H) = \{g \in G : gh = hg \text{ für alle } h \in H\}$$

eine Untergruppe von G ist. (Man nennt diese Untergruppe auch den Zentralisator)

(ii) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G genau dann abelsch ist, wenn die Inversenabbildung $g \mapsto g^{-1}$ ein Gruppenhomorphismus ist.

(iii) Sei G eine Gruppe mit der Eigenschaft $(gh)^2 = g^2h^2$ für alle $g, h \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 3. *(Symmetrische Gruppe, Zykel, Satz von Lagrange)*

(i) Seien folgende Elemente der Symmetrischen Gruppe S_7 gegeben

$$\alpha = (1\,3\,5\,7)(2\,4), \beta = (2\,3\,1\,4), \gamma = (2\,3)$$

Berechnen Sie α^3, $\alpha^2\beta$, α^{-1} und $\gamma\alpha\beta$ und jeweils das Signum der Permutationen.

(ii) Gibt es eine Untergruppe von S_3 der Ordnung 4 und gibt es eine Untergruppe der Ordnung 3? Sollte es eine geben, geben Sie die Erzeuger an.

(iii) Zeigen Sie, dass eine Gruppe G mit Ordnung p, wobei p prim ist, zyklisch ist.

Aufgabe 4. *(Ringe und Körper)*

(i) Wir betrachten den Ring $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Was ist das multiplikative Inverse von $a + b\sqrt{2}$?

(ii) Zeigen Sie, dass jeder Körperhomomorphismus ungleich der Nullabbildung injektiv ist.

Aufgabe 5. *(Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus)*

(i) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc}
6x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & = 5 \\
4x_1 & +2x_2 & +1x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = 4 \\
4x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +1x_5 & = 0 \\
2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = 1
\end{array}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_3$.

(ii) Gegeben sei in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc}
1x_1 & -3x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +2x_5 & = 1 \\
0x_1 & +0x_2 & 1x_3 & +0x_4 & -1x_5 & = 1 \\
0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & 1x_4 & +1x_5 & = 0 \\
0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & = \alpha
\end{array}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit ganzzahligen Einträgen. Zeigen Sie: Ist $Ax = \underline{0}$ für ein $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{\underline{0}\}$ lösbar, so existiert auch eine Lösung $x_0 \in \mathbb{Z}^m \backslash \{\underline{0}\}$ mit $Ax_0 = \underline{0}$.

Aufgabe 6. *(Inverse berechnen)*

(i) Sind folgende Matrizen invertierbar? Geben Sie, wenn ja, deren Inverse an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2\times 2}$$

(ii) Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix sodass es $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^k = 0$. Zeigen Sie, dass dann A nicht invertierbar ist.