



Repetitorium Analysis 1 (WS 2025/26)

Blatt 1

Induktion, Abzählbarkeit, Konvergenz von Folgen und Reihen

Aufgabe 1 (Quiz): Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

- (i) Die Menge \mathbb{Q} ist abzählbar.
- (ii) Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist abzählbar.
- (iii) Ist $I \neq \emptyset$ eine Menge und A_i abzählbar für alle $i \in I$, ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ abzählbar.
- (iv) Ist $I \neq \emptyset$ eine Menge und A_i abzählbar für alle $i \in I$, ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ abzählbar.
- (v) Ist $I \neq \emptyset$ abzählbar und A_i abzählbar für alle $i \in I$, ist $\prod_{i \in I} A_i$ abzählbar.
- (vi) (a_n) ist eine konvergente Folge reeller Zahlen genau dann, wenn (a_n) eine Cauchy-Folge ist.
- (vii) Für jede Folge (a_n) reeller Zahlen gilt: (a_n) ist genau dann konvergent, wenn (a_n) beschränkt ist.
- (viii) Seien (a_n) und (b_n) Folgen positiver Zahlen, sodass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann konvergiert die Quotienten-Folge (a_n/b_n) gegen 0.
- (ix) Eine Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt sodass $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
- (x) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.
- (xi) Jede konvergente Reihe ist absolut konvergent.
- (xii) Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und (b_n) eine Folge nichtnegativer Zahlen sodass $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Aufgabe 2 (Induktion): Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion.

- (i) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (iv) $\prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (v) $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

Aufgabe 3 (Abzählbarkeit): Zeigen Sie folgende Aussagen.

- (i) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und M_1, \dots, M_n nichtleere, abzählbare Mengen. Dann ist $M_1 \times \dots \times M_n$ abzählbar.
- (ii) Sei $\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f \text{ Abbildung}\}$ die Menge aller Abbildungen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} . Dann ist $\text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ überabzählbar.

Aufgabe 4 (Suprema und Infima): Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und A sei nach oben beschränkt. Weiterhin gebe es für jedes $x \in B$ ein $y \in A$ mit $x < y$. Zeigen Sie dass dann ebenfalls B nach oben beschränkt ist mit $\sup B \leq \sup A$. Gilt auch $\sup B < \sup A$?

Aufgabe 5 (Grenzwerte von Folgen): Untersuchen Sie die Folgen (a_n) auf eigentliche oder uneigentliche Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

- (i) $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ für $n \geq 1$.
- (ii) $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
- (iii) $a_n = \frac{2n^3 - 4n^2 + n + 1}{n^2 + n + 1}$.
- (iv) $a_n = (-1)^n \frac{n^2 - 2n}{n^3 + 4n + 1}$.
- (v) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ mit $0 < a \leq b$.

Aufgabe 6 (Mehr zu Folgen): Sei (a_n) eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Folge (b_n) durch

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dass (b_n) ebenfalls gegen a konvergiert.

Aufgabe 7 (Und noch mehr zu Folgen):

- (i) Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

- (ii) Sei (a_n) eine Folge, sodass es $C \in [0, 1)$ gibt, sodass $|a_{n+1}| \leq C|a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (a_n) gegen 0 konvergiert.
- (iii) Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie dass (a_n) genau dann konvergiert, wenn $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ist und, dass dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Aufgabe 8 (Konvergenz von Reihen):

- (i) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+2n}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$.
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+n}}$.
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

- (ii) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren folgende Reihen?

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

- (iii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Wert. *Hinweis: Partialbruchzerlegung.*

Aufgabe 9 (Mehr zu Reihen): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und (b_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent ist. Gilt dies auch wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nur als konvergent vorausgesetzt ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 10 (Etwas kniffliger): Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, wenn es für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt sodass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$. Weiterhin nennen wir eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist. Zeigen Sie dass $A \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge ist genau dann, wenn für jede konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$ ist.

Hinweis: Diese Aufgabe ist wahrscheinlich nicht relevant für die Klausur, ihr werdet in Analysis 2 eine viel allgemeinere Version dieser Aussage sehen. Dennoch ist die Aufgabe mit Kenntnissen aus der Analysis 1 lösbar.