Universität des Saarlandes
Fachschaft Mathematik
Maximilian Leist
Jonas Metzinger

Repetitorium Analysis 1 (WS 2025/26)
Blatt 2
Komplexe Zahlen, Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen

---

Aufgabe 1 (Quiz): Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel. Seien stets $D \subseteq \mathbb{R}$, sodass D nicht nur einen Punkt enthält und $f, g : D \to \mathbb{R}$

(i) Es gibt keine Ordnung auf $\mathbb{C}$, so das die Anordnungsaxiome erfüllt sind.

(ii) f ist stetig in $x \in D$, wenn es eine Folge (x_n) in D gibt, die gegen x konvergiert, sodass $(f(x_n))$ gegen $f(x)$ konvergiert.

(iii) Ist f gleichmäßig stetig, dann ist f stetig.

(iv) f ist nicht stetig in $x \in D$, wenn es eine Folge (x_n) in D gibt, die gegen x konvergiert, sodass $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x)$ konvergiert.

(v) Ist f stetig in $x \in D$, dann ist f in x differenzierbar.

(vi) Ist f stetig und D beschränkt, dann ist f beschränkt.

(vii) Sind f und g nicht differenzierbar in $x \in D$ dann ist $f + g$ nicht differenzierbar in x.

(viii) Ist f gleichmäßig stetig und D beschränkt, dann ist f beschränkt.

(ix) Ist f differenzierbar und $x_0 \in D$ ein innerer Punkt von D und eine Extremstelle von f dann ist $f'(x_0) = 0$.

(x) Ist f 2-mal differenzierbar und $x_0 \in D$ sodass $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, dann hat f in x_0 kein lokales Extremum.

(xi) Ist f differenzierbar und $f' > 0$ auf D dann ist f streng monoton wachsend.

(xii) Wenn ich in der Klausur eine Funktion ableite, dann gehe ich sicher dass die Funktion differenzierbar ist und schreibe es auch hin.

Aufgabe 2 (Komplexe Zahlen): (i) Geben Sie für folgende komplexe Zahlen z jeweils Real-, Imaginärteil und den Betrag an und bringen Sie z auf die Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bzw. $z = r \cdot e^{i\varphi}$ mir $r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi)$.

(a) $z = 3 + 4i$.

(b) $z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(c) $z = \frac{12}{5} + \frac{9}{5}i$.

(d) $z = e^{-i\pi}$.

(ii) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen über $\mathbb{C}$.
Hinweis für (c): Eine Lösung der Gleichung ist reell.

(a) $z^2 + 2z - 2i + 1 = 0$.

(b) $z^4 = 1$.

(c) $z^3 - iz^2 - 2z^2 + 7z + 4iz - 6 - 3i = 0$.

Hinweis: die komplexen Zahlen sind algebraisch abgeschlossen, das bedeutet dass ein Polynom n-ten Grades über den komplexen Zahlen genau n Nullstellen hat (mit Vielfachheit gezählt, $n \geq 1$).

Aufgabe 3 (Stetigkeit): Untersuchen Sie folgende Funktionen f auf Stetigkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs. Welche der Funktionen sind gleichmäßig stetig?

(i) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & , x \in (0, 1] \\ 1 & , x = 0 \end{cases} .$$

(ii) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) - 1 & , x \in [0, 1] \\ 0 & , x \in [-1, 0) \end{cases} .$$

(iii) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \in (0, 1) \\ -\sqrt{x - 1} + 1 & , x \in [1, \infty) \end{cases} .$$

(iv) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Aufgabe 4 (Sätze über stetige Funktionen): Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sodass $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass es $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) = cx$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{N}$. Dann ist f konstant.

(iii) Die Gleichung $\exp(x) + x = x^2$ besitzt mindestens eine Lösung in dem Intervall $[-1, 1]$.

Hinweis zu (i): Wenn $f(x) = cx$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, was ist dann $f(1)$?

Aufgabe 5 (Differenzierbarkeit): Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs.

(i) Sei $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Ist f differenzierbar, so bestimme man f' und prüfe die Ableitung auf Stetigkeit.

(ii) Sei $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

(iii) Wieso ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{|x|}$$

nicht differenzierbar in $x = 0$?

Aufgabe 6 (Extremstellen): (i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Man beweise, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^n e^{-n}$ an genau einer Stelle, nämlich $x = n$ ihr einziges (absolutes, als auch relatives) Maximum annimmt.

(ii) Sei folgende Funktion gegeben

$$f\colon \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\log(x)}{x}.$$

Bestimmen Sie alle lokale als auch globale Extrema. Man bestimme zusätzlich die maximalen Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$ in denen die Funktion konvex, bzw. konkav ist.

Aufgabe 7 (Mittelwertsatz, Sätze über differenzierbare Funktionen): Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, dann gilt genau dann $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in I$, wenn f ein Polynom vom Grad echt kleiner n war.

(ii) Zeigen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes für $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, dass

$$\exp\left(x^2\right) \leq \frac{1}{1-2x^2}$$

gilt.

(iii) Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem offenen Intervall I und differenzierbar in $I \backslash \{a\}$ mit $a \in I$. Weiterhin existiere $c := \lim_{x \to a} f'(x)$. Zeigen Sie, dass f in a differenzierbar ist und es gilt $c = f'(a)$.
Hinweis: Betrachten Sie Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$*, die gegen* a *konvergieren und nutzen Sie den Mittelwertsatz.*

(iv) Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion mit $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass f streng monoton fallend ist.

(v) Sei $V \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $x \in V$ mit $f'(x) > 0$. Zeigen Sie, dass ein offenes Intervall $U \subseteq V$ mit $x \in U$ existiert, sodass die Einschränkung

$$f\mid_U : U \to \mathbb{R}$$

injektiv ist.

Aufgabe 8 (Grenzwerte): Entscheiden und zeigen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren. Sei $a > 0$.

a) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos(x)) - 1}{x - \pi/2}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x\cos(x)}{x+2}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (\sinh(x) + 1)^{1/x}$ d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x) + x}{\log(1+x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{7}}$ f) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{a^{\log(x)} - x}{\log(x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$ h) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2})$