



Repetitorium Analysis 1 (WS 2025/26)

Blatt 3

Integration, Funktionenfolgen, Taylorreihen

Aufgabe 1 (Quiz): Welche der folgenden Aussagen sind Wahr? Begründen Sie ihre Aussage mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel. Seien $a < b$ und $f_n, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Jede 2-mal differenzierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.
- (ii) Wenn f stetig ist dann ist $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ Lipschitz-stetig und differenzierbar.
- (iii) Für jede integrierbare Funktion existiert eine analytisch geschlossene Formel für die Stammfunktion, d. h. wir können eine Stammfunktion konkret angeben.
- (iv) Es gilt $\int e^{-x^2} dx = \frac{1}{-x^2} e^{-x^2}$.
- (v) Jede auf einem beschränkten Intervall definierte stetige Funktion hat ein endliches Integral auf diesem Intervall.
- (vi) Sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Ist f unstetig, so konvergiert f_n nicht gleichmäßig gegen f .
- (vii) Es sei $f \in C^\infty[a, b]$. Die Taylorreihe von f konvergiert auf ganz $[a, b]$.

Aufgabe 2 (Integrale ausrechnen): Bestimmen Sie folgende Integrale

(i)

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$$

(ii)

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

(iii)

$$\int_0^{4\pi} x \sin(x) \cos(x) dx$$

(iv)

$$\int_0^1 \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} dx$$

(v)

$$\int_0^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$$

(vi)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin(2x) dx$$

(vii)

$$\int_e^{e^e} \frac{\log(\log(x))}{x} dx$$

(viii)

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^2} dx$$

(ix)

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$$

(x) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ für welche das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(\log(x))^\alpha} dx$$

existiert. Bestimmen Sie den Wert, falls das uneigentliche Integral existiert.

Aufgabe 3 (Riemann-Integral): Sei $a < b$.

(i) Das Riemann-Integral ist monoton, d. h. für riemann-integrierbare Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ so gilt

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass f Riemann-integrierbar ist.

(iii) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ riemann-integrierbar und es existiere ein $\delta > 0$ mit $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist $1/f$ riemann-integrierbar.

Hinweis: Man betrachte geeignete Treppenfunktionen ψ, ϕ mit der Eigenschaft $\psi \leq f \leq \phi$ und

$$\int_a^b \psi(x) - \phi(x) dx \leq \varepsilon'.$$

(iv) Zeigen Sie, dass folgendes Integral konvergiert,

$$\int_0^\infty \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cos(x) dx.$$

Aufgabe 4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Seien $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $\varphi: [c, d] \rightarrow I$ stetig differenzierbar mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

(ii) Seien $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow [a, b]$ differenzierbar und sei f eine auf $[a, b]$ stetige Funktion. Bestimme die Ableitung

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt.$$

Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $H(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ mit $x_0 \in [a, b]$.

Aufgabe 5 (Konvergenz von Funktionenfolgen): (i) Sei $f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-x/n}$$

definiert. Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx = 0?$$

(ii) Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n: [0, 2023] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$.

(b) $g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_n(x) = nx(1-x^2)^n$.

(c) $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_n(x) = \max\{0, n - n^2|x - \frac{1}{n}|\}$.

Aufgabe 6 (Funktionenfolge): Man zeige folgende Aussagen

(i) Sei $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die monoton fallend ist, d. h. $f_n \geq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin konvergiere f punktweise gegen 0, dann konvergiert f gleichmäßig.

Hinweis: Man zeige die Aussage durch Widerspruch und nutze den Satz von Bolzano-Weierstraß.

- (ii) Sei $f_n: [a, b] \rightarrow [A, B]$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion F konvergiert. Weiterhin sei $\varphi: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann konvergiert die Funktionenfolge $\varphi \circ f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $G := \varphi \circ F$.
- (iii) Sei $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen eine Funktion $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Ebenso konvergiert sie punktweise gegen $G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. Gilt $F = G$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Aufgabe 7 (Satz von Taylor): (i) Sei $\alpha > 0$ und $|x| < 1$. Zeigen Sie, dass folgende Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

mit $\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha-k}{k+1}$. Zeigen Sie insbesondere, dass die Reihe lediglich für $|x| < 1$ konvergiert.

Bestimmen Sie zunächst die Taylorreihe der Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Hinweis: Die Konvergenz der Taylorreihe gegen f lässt sich mit dem Lagrange Restglied nicht zeigen. Stattdessen nutzt man das Integralrestglied. Diesen Schritt müssen Sie also als gegeben annehmen.

- (ii) Bestimmen Sie für $\alpha > 0$ durch geeignete algebraische Umformungen die Taylorreihe von $f(x) = x^\alpha$ im Entwicklungspunkt $x_0 = a$ mit Hilfe von (i).
- (iii) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = \log(1+x)$ für $x \geq 0$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und zusätzlich den Konvergenzradius der Taylorreihe. Konvergiert die Taylorreihe in dem Konvergenzbereich gegen die Funktion?

Hinweis: Nutzen Sie das Lagrange-Restglied für den letzten Teil der Aufgabe.