REPETITORIUM LA I
Aufgaben

gehalten von
Nico Wiedmann, Lukas Zenner und Jakob Kunkel

Mathematik Fachschaft
Website: **https://mathwp.fsr.saarland/**
Instagram: **https://instagram.com/fsmatheuds/**
E-Mail: fsmathe@math.fs.uni-saarland.de

Tag 1

Aufgabe 1:
Im Folgenden bezeichnet $[a]_n$ die Restklasse von a in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Seien $(G,+) := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$ und $(H,+) := (\mathbb{Z}/30\mathbb{Z})$. Dabei ist G ausgestattet mit komponentenweiser Addition, das heißt:

$$([a]_2,[b]_3) + ([a']_2,[b']_3) = ([a+a']_2,[b+b]_3')$$

Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$\phi : (G,+) \to (H,+), ([a]_2,[b]_3) \mapsto [15a-10b]_{30}$$

(i) Zeigen Sie, dass ϕ wohldefiniert ist.
Hinweis: Wie sollte ϕ von den gewählten Vertretern abhängen?

(ii) Zeigen Sie, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(iii) Ist ϕ injektiv bzw. surjektiv?

Aufgabe 2:
Sei M eine Menge. Sei $\sim$ die folgende Relation auf $\mathcal{P}$(M):

$$A \sim B :\Leftrightarrow \exists \phi : A \to B, \text{ sodass } \phi \text{ bijektiv ist}$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzralation ist. Berechnen Sie die Äquivalenzklassen von $\sim$, wenn $M = \{1,2,3,4\}$.

Aufgabe 3:
Im Folgenden ist die Verknüpfung in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ jeweils die Addition, in $\mathbb{Q}^*$ und $\mathbb{R}^*$ jeweils die Multiplikation.
Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

(i) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x$

(ii) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x+1$

(iii) $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^*, x \mapsto x^2+1$

(iv) $f_4 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto |x|$

Aufgabe 4:

(a) Berechnen Sie die multiplikativen Inversen der komplexen Zahlen $5+2i$, $1+i$ und $1+2i$. Skizzieren Sie die Punkte in $\mathbb{R}^2$, die durch die drei Inversen beschrieben werden.

(b) Beschreiben Sie die folgende Mengen geometrisch:

   (i) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| \leq 3\}$

   (ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \wedge |z-1| = 7\}$

(c) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, sodass $z^2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5:
Faktorisieren Sie das Polynom

$$p = x^3 - x^2 + x - 1$$

über den Körpern $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 6:
Sei V ein K-Vektorraum und seinen $W_1, W_2 \subseteq V$ zwei Unterräumen. Beweisen Sie, dass $W_1 \cup W_2$ ganau dann ein Unterraum ist, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$ gilt.

Aufgabe 7:
Welche der folgenden Mengen sind Unterräume der jeweiligen Vektorräume?

(i) $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(ii) $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = -1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(iii) $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq y + z\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(iv) $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq -5\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Aufgabe 8:
Betrachten Sie folgende Mengen:

$$\mathbb{R}[x] := \{\text{Menge aller reellen Polynomfuntionen}\}$$
$$G(\mathbb{R}) := \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$
$$U(\mathbb{R}) := \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Zeigen Sie, dass

(a) $\mathbb{R}[x]$ ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

(b) $G(\mathbb{R})$ und $U(\mathbb{R})$ Unterräume von $\mathbb{R}$[x] sind.

(c) $\mathbb{R}[x] = G(\mathbb{R}) \oplus U(\mathbb{R})$

Aufgabe 9:

(a) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, x + y, 0),$$

und die folgenden Basen von $\mathbb{R}^3$:

$$\mathfrak{B}_1 := \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},\ \mathfrak{B}_2 := \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen von f bzgl. der Basen:

(i) $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_1$
(ii) $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$
(iii) $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_1$
(iv) $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_2$

(b) Beweisen Sie, dass die Ableitung

$$T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], p \mapsto p',$$

eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.
$Bonus : Ist\ F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], p \mapsto p'' eine\ linerae\ Abbildung?$

Aufgabe 10:
Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrix

$$A(h) := \begin{pmatrix} h & 1 & 0 & h \\ 1 & h & h+1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $h \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 11:

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_2)$$

invertierbar ist und berechnen Sie A^{-1} und $(A^T)^{-1}$.

(b) Finden Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechnen Sie A^{-1} für alle solche a.

Aufgabe 12:
Finden Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass das reelle Gleichungssytem

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z = a \end{cases}$$

(i) keine Lösungen, (ii) eine eindeutige Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 13:
Sei

$$SL(3, \mathbb{R}) := \{A \in GL(3, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{R})?$$

Tag 2

Aufgabe 14:
Berechnen Sie das charakteristische Polynome, die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15:
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x3}$$

Berechnen Sie A^m für alle $m \in \{2, 5, 10, 2026\}$

Aufgabe 16:
Betrachten Sie die Vektoren $x =$ (0,2,2,-1), $y =$ (-1,0,2,3), $z =$ (1,4,-1,0) im Skalarproduktraum $\mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen Skalarprodukt.

(i) Checken Sie, dass die Vektoren x, y, z linear unabhängig sind.

(ii) Ergänzen Sie die Menge $\{x, y, z\}$ zu einer Basis $\mathfrak{B} = \{x, y, z, w\}$ von $\mathbb{R}^4$.

(iii) Orthonormalisieren Sie die Basis $\mathfrak{B}$

Aufgabe 17:
Sei $V = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = x^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y$$

Bestimmen Sie bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Adjungierte der Abbildung:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \, x \mapsto \; Ax, \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18:
Wir betrachten $\mathbb{R}^5$ mit den kanonischen Skalarprodukt. Weiterhin sei ein Unterraum U gegeben mit der Orthogonalbasis

$$\mathfrak{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \}$$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

(b) Was ist die orthogonale Projektion von $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf U?

Aufgabe 19:
Wir betrachten den reellen Vektorraum $V := \mathbb{R}[x]$ mit der Abbildung:

$$b : V \to \mathbb{R},\ (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

(a) Zeigen Sie, dass b ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]$ definiert.

(b) Begründen Sie, dass b auch auf $\mathbb{R}_3[x]$ ein Skalarprodukt definiert.

(c) Bestimmen Sie eine orthonormal Basis für $\mathbb{R}_3[x]$.

Aufgabe 20:
Sei $M = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \exists m \in \mathbb{N} : A^n = 0\}$ die Menge der nilpotenten Matrizen. Seien $A, B \in M$. Setze

$$k = \min\{t \in \mathbb{N} \mid A^t = 0\},\ l = \min\{t \in \mathbb{N} \mid B^t = 0\}$$

Zeigen Sie: A und B sind ähnlich genau dann, wenn $k = l$.